Subject:

Implicit Integration Algorithm: Radial Return Mapping — نگاشت برگشتی شعاعی:

این روش یک روش متداول جهت برگشت به سطح تسلیم فون میزز است. ابتدا به صورت یادآوری روابط مورد نیاز ارائه می‌گردد:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{el} + d\varepsilon_{ij}^{pl}$$

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl}^{el}$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

با قرار دادن تانسور C_{ijkl} می‌توان نوشت:

$$d\sigma_{ij} = \lambda\, d\varepsilon_{kk}^{el}\,\delta_{ij} + 2\mu\, d\varepsilon_{ij}^{el}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

۱ $$d\sigma_{ij} = K\, d\varepsilon_{kk}^{el}\,\delta_{ij} + 2G\, de_{ij}^{el}$$

$$de_{ij}^{el} = d\varepsilon_{ij}^{el} - d\varepsilon_{kk}^{el}\frac{\delta_{ij}}{3}$$

و داریم:

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(بقیه ص ۷۴) $$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

معرفی تابع تسلیم:

$$f = J_2 - k^2(\varepsilon_p) = 0$$ شکل متداول در کتب.

$$f = \sqrt{3J_2} - \sqrt{3}k = 0$$ شکل متداول در کدهای محاسباتی

که در این بخش از f زیر استفاده می‌شود:

$$\rightarrow f = \sigma_e - \sigma_y = 0 \qquad \sigma_y = \sigma_0 + R(\varepsilon_p) \qquad \sigma_e = \sqrt{3J_2},\ \sqrt{3}k = \sigma_y$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \sigma_y = 0$$

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda\, N_{ij} = \frac{3}{2} d\lambda \frac{s_{ij}}{\sigma_e}$$

$$N_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} s_{ij} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\sigma_e}$$

$$d\varepsilon_p = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{p}\, d\varepsilon_{ij}^{p}} = \left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} d\lambda \frac{s_{ij}}{\sigma_e}\right)\left(\frac{3}{2} d\lambda \frac{s_{ij}}{\sigma_e}\right)\right)^{1/2}$$

$$d\varepsilon_p = \left(\frac{3}{2} d\lambda^2 \frac{s_{ij}}{\sigma_e}\frac{s_{ij}}{\sigma_e}\right)^{1/2} = d\lambda \rightarrow d\varepsilon_p = d\lambda$$

Computational methods for Plasticity (Chapter 7)
by: Neto & Peric & Owen

Subject:

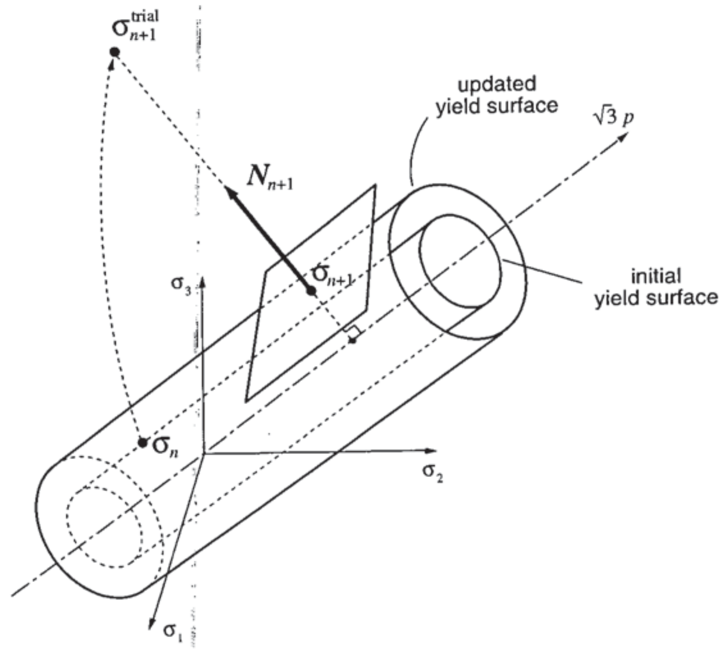


Figure 7.8. The implicit elastic predictor/return-mapping scheme for the von Mises model. Geometric interpretation in principal stress space.

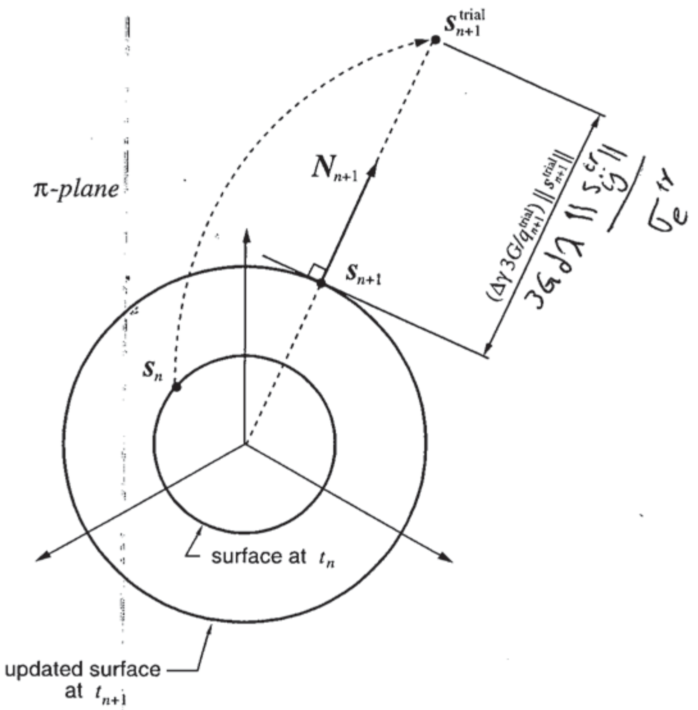


Figure 7.9. The implicit elastic predictor/return-mapping scheme for the von Mises model. Geometric interpretation in the deviatoric plane.

Subject:

مقادیر تانسورها و متغیرها در زمان t_n ، با بالانویس n مشخص شده و معلوم فرض می‌شوند و مقادیر متغیرها در زمان t_{n+1} ، با بالانویس $n+1$ نشان داده شده و مجهول هستند در پایان این الگوریتم محاسبه می‌شوند.

گام در زمان $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ انجام می‌گردد.

$$t_n : \quad \sigma_{ij}^{n} \;,\quad \varepsilon_{ij}^{pl,n} \;,\quad \Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^{n+1} = \checkmark$$

$\Delta\varepsilon_{ij}$ مربوط گام کرنش در زمان t_{n+1} است که برای سادگی $n+1$ حذف می‌شود.

$$t_{n+1} \quad \sigma_{ij}^{n+1} \qquad \varepsilon_{ij}^{pl,n+1} \qquad C_{ijkl}^{ep} = ?$$

ابتدا با فرض پیش‌بینی الاستیک تنش‌های آزمایشی trial stress را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_{ij}^{trial} = \sigma_{ij}^{n} + d\sigma_{ij}^{trial} \qquad (1)$$

$$\sigma_{ij}^{trial} = \sigma_{ij}^{n} + C_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{ij} \qquad (2)$$

از طرف دیگر:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^{n} + C_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl}^{el} = \sigma_{ij}^{n} + C_{ijkl}\left(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^{pl}\right)$$

$$= \sigma_{ij}^{trial} - C_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl}^{pl} \qquad (3)$$

$$\rightarrow \sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^{trial} - d\lambda\, C_{ijkl}\, N_{kl}^{n+1} \quad (4) \quad \rightarrow \quad s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{trial} - d\lambda\, C_{ijkl}\, N_{kl}^{n+1} \quad (5)$$

و برحسب مؤلفه‌های کاهش یافته:

$$s_{ij}^{trial} = s_{ij}^{n+1} + d\lambda\, C_{ijkl}\, N_{kl}^{n+1} \qquad (6)$$

محاسبه

$$C_{ijkl}\, N_{kl}^{n+1} = \left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right] N_{kl}^{n+1}$$

$$= \lambda\delta_{ij}\,\cancel{N_{kk}^{n+1}}^{\,0} + 2G\, N_{ij}^{n+1}$$

$$= 2G\,\frac{3}{2}\,\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}} = 3G\,\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}}$$

$$\rightarrow s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{trial} - 3G\,d\lambda\,\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}} \qquad (7)$$

$$s_{ij}^{n+1} s_{ij}^{n+1} = \left(s_{ij}^{trial} - 3G\,d\lambda\,\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}}\right)\left(s_{ij}^{trial} - 3G\,d\lambda\,\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}}\right)$$

$$= s_{ij}^{trial} s_{ij}^{trial} - 6G\,d\lambda\,\frac{s_{ij}^{n+1} s_{ij}^{trial}}{\sigma_e^{n+1}} + 9(G\,d\lambda)^2\,\frac{s_{ij}^{n+1} s_{ij}^{n+1}}{(\sigma_e^{n+1})^2}$$

Subject:

$$S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^{trial} S_{ij}^{trial} - 6G\,d\lambda \frac{S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{trial}}{\sigma_e^{n+1}} + 6(G\,d\lambda)^2 \qquad (۸)$$

از ضرب رابطهٔ $\frac{(۷)}{\sigma}$ در S_{ij}^{n+1} داریم:

$$S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{trial} = S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1} + 3\,d\lambda G \underbrace{\frac{S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}}}_{= \frac{2}{3}\sigma_e^{n+1}}$$

$$\rightarrow S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{trial} = S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1} + 2\,d\lambda G\,\sigma_e^{n+1} \qquad (۹)$$

با قرار دادن رابطهٔ (۹) در (۸) داریم:

$$S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^{trial} S_{ij}^{trial} - 6\,d\lambda G \frac{S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1} + 2\,d\lambda G \sigma_e^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}} + 6(d\lambda G)^2$$

$$\rightarrow S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^{trial} S_{ij}^{trial} - 4\,d\lambda G\,\sigma_e^{n+1} - 12(d\lambda G)^2 + 6(d\lambda G)^2$$

$$\rightarrow S_{ij}^{trial} S_{ij}^{trial} = S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1} + 4\,d\lambda G\,\sigma_e^{n+1} + 6(d\lambda G)^2$$

طرفین رابطهٔ فوق $\frac{3}{2}$ * و سپس جذر آن:

$$\sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^{tr} S_{ij}^{tr}} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij}^{n+1} S_{ij}^{n+1} + 2(3\,d\lambda G)(\sigma_e^{n+1}) + (3\,d\lambda G)^2}$$

$$\sigma_e^{tr} = \sigma_e^{n+1} + 3\,d\lambda G \qquad (۱۰)$$

با ضرب رابطهٔ (۷) در عبارت σ_e^{n+1} داریم:

$$\rightarrow \sigma_e^{n+1} S_{ij}^{n+1} + 3\,d\lambda G\, S_{ij}^{n+1} = \sigma_e^{n+1} S_{ij}^{tr}$$

$$\rightarrow (\sigma_e^{n+1} + 3\,d\lambda G)\, S_{ij}^{n+1} = \sigma_e^{n+1} S_{ij}^{tr} \qquad (11)$$

$$\xrightarrow{(۱۰),(11)} \sigma_e^{tr} S_{ij}^{n+1} = \sigma_e^{n+1} S_{ij}^{tr}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \frac{S_{ij}^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}^{tr}}{\sigma_e^{tr}} \rightarrow N_{ij}^{n+1} = N_{ij}^{tr} \qquad (12)$$

این رابطه نشان دهنده برگشت شعاعی برای معیار تسلیم فون میزز است.

از آنجا که σ_e^{n+1} باید شرایط تسلیم را ارضا نماید یعنی باید

$$f = \sigma_e^{n+1} - \sigma_y^{n+1} = 0 \qquad (\sigma_y^{n+1} = \sigma_0 + R(\varepsilon_p^{n+1}))$$

$$\xrightarrow{(۱۰)} -3\,d\lambda G + \sigma_e^{tr} - [\sigma_0 + R(\varepsilon_p^{n+1})] = 0 \qquad (13)$$

از معادله (13)، ضریب پلاستیک $d\lambda$ محاسبه می‌گردد. به عنوان مثال

IDEA

Subject:

برای ماده همسانگرد خطی، تنش معادل سخت شوندگی $R(\varepsilon_p^{n+1})$ تابع کرنش پلاستیک معادل است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R(\varepsilon_p^{n+1}) = K\varepsilon_p^{n+1} = K(\varepsilon_p^{n} + d\lambda) = K\varepsilon_p^{n} + K\,d\lambda$$

$$\Rightarrow -\sigma_0 - K\varepsilon_p^{n} - K\,d\lambda - 3\,d\lambda\,G + \sigma_e^{tr} = 0$$

$$\rightarrow d\lambda = \frac{\sigma_e^{tr} - (\sigma_0 + K\varepsilon_p^{n})}{K + 3G} = \frac{f^{tr}}{K+3G} \qquad (14)$$

محاسبه C^{ep}_{ijkl}:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_p) = 0$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}\frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_p} d\varepsilon_p = 0 \qquad (15) \qquad \sigma_e - \sigma_y = 0$$

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right) \quad (16), \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = -1 \quad \text{و} \quad \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_p} = K, \quad d\varepsilon_p = d\lambda$$

$$\xrightarrow{(15)} N_{ij} C_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl} - N_{ij} C_{ijkl}\, d\lambda\, N_{kl} - K\,d\lambda = 0$$

$$d\lambda = \frac{N_{ij} C_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl}}{N_{ab} C_{abcd} N_{cd} + K} \qquad (17)$$

$$\xrightarrow{(16)\text{ و }(17)} d\sigma_{ij} = C_{ijmn}\left(d\varepsilon_{mn} - \frac{N_{pq} C_{pqrs}\, d\varepsilon_{rs}}{N_{ab} C_{abcd} N_{cd} + K} N_{mn}\right)$$

$$d\sigma_{ij} = C_{ijmn}\left(\delta_{km}\delta_{ln}\, d\varepsilon_{kl} - \frac{N_{pq} C_{pqrs}\,\delta_{kr}\delta_{ls}\, d\varepsilon_{kl}}{N_{ab} C_{abcd} N_{cd} + K} N_{mn}\right)$$

$$d\sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} N_{mn} N_{pq} C_{pqkl}}{N_{ab} C_{abcd} N_{cd} + K}\right] d\varepsilon_{kl} \qquad (18)$$

$$d\sigma_{ij} = C^{ep}_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl}$$

Subject:

الگوریتم عددی:

- داده‌ها: σ_{ij}^{n} , $\varepsilon_{ij}^{pl,n}$, ε_{p}^{n} , $\Delta\varepsilon_{ij}$

- پارامترهای ماده (داده‌ها): G , ν , σ_0 , K ـ شیب کارسختی

- محاسبه: C_{ijkl}

- محاسبه تنش‌های الاستیک آزمایشی: $\sigma_{ij}^{tr} = \sigma_{ij}^{n} + C_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl}$

- محاسبه تابع تسلیم آزمایشی: $f(\sigma_{ij}^{tr}, \varepsilon_{p}^{n}) = f^{tr}$

- If $(\sigma_e^{tr} - f^{tr}) \le 0$ then exit integration scheme - End If

- If $\sigma_e^{tr} - f^{tr} > 0$ then

- محاسبه ضریب پلاستیک: $d\lambda = \dfrac{f^{tr}}{K+3G}$

- محاسبه گام کرنش پلاستیک: $\Delta\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda\, N_{ij}^{tr}$ $\qquad N_{ij}^{tr} = \dfrac{3}{2}\dfrac{s_{ij}^{tr}}{\sigma_e^{tr}}$

- محاسبه گام کرنش الاستیک: $\Delta\varepsilon_{ij}^{el} = \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^{pl}$

- محاسبه گام تنش: $d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl}^{el}$

به هنگام نمودن مقادیر:

- تنش‌ها: $\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^{n} + d\sigma_{ij}$

- کرنش‌ها: $\varepsilon_{ij}^{pl,n+1} = \varepsilon_{ij}^{pl,n} + \Delta\varepsilon_{ij}^{pl}$

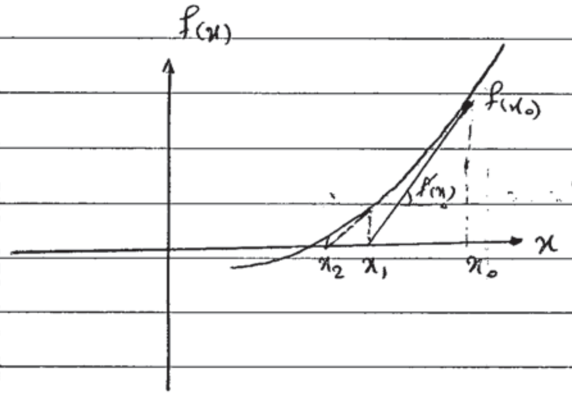
- کرنش پلاستیک موثر: $\varepsilon_{p}^{n+1} = \varepsilon_{p}^{n} + d\lambda$

- محاسبه ماتریس الاستیک-پلاستیک: $C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \dfrac{C_{ijmn}N_{mn}N_{pq}C_{pqkl}}{N_{ab}C_{abcd}N_{cd} + K}$

END If

دقت کنید: $N_{ij}^{n+1} = N_{ij}^{tr} = \dfrac{3}{2}\dfrac{s_{ij}^{n+1}}{\sigma_e^{n+1}} = \dfrac{3}{2}\dfrac{s_{ij}^{tr}}{\sigma_e^{tr}}$

Subject:



$$x_1 = x_0 - \Delta x \qquad \Delta x = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

در صورتی که کار سختی، خطی نباشد، از معادله ۱۳ ص داریم:

$$\phi(d\lambda) \triangleq \sigma_e^{tr} - 3d\lambda G - \left[\sigma_0 + R(\varepsilon_p^{n+1})\right]$$

یا $\phi(d\lambda) = \sigma_e^{tr} - 3d\lambda G - \left[\sigma_0 + R(\varepsilon_p^{n} + d\lambda)\right]$

برای بدست آوردن $d\lambda$ که در آن $\phi(d\lambda) = 0$ از روش تکرار (نیوتن رافسون) استفاده می‌شود:

(i) پیشنهاد مقدار اولیه برای $k \triangleq 0$ اولین مرحله تکرار

$$d\lambda = 0$$

(مقدار تابع تسلیم $\phi(d\lambda=0)$) یا محاسبه مقدار باقیمانده

$$\phi := \sigma_e^{tr} - 3d\lambda G - \underbrace{\left[\sigma_0 + R(\varepsilon_p^{n})\right]}_{\sigma_y}$$

(ii) اجرای حلقه نیوتن رافسون

$$H := \left.\frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_p}\right|_{\varepsilon_p^n + d\lambda} \quad \text{(شیب سخت شوندگی)}$$

$$d := \frac{d\phi}{d(d\lambda)} = -3G - H \quad \text{(مشتق باقیمانده)}$$

$$d\lambda := d\lambda - \frac{\phi}{d} \quad \text{(مقدار پیشنهادی جدید } d\lambda\text{)}$$

(iii) چک کردن همگرایی

$$\phi := \sigma_e^{tr} - 3d\lambda G - \left[\sigma_0 + R(\varepsilon_p^{n} + d\lambda)\right]$$

If $|\phi| \le \varepsilon_{tol}$ then GO TO .

(iv) GoTo (ii)